INTRODUZIONE

Questo file contiene i teoremi più importanti sui quadrilateri notevoli, sui luoghi geometrici e sui teoremi del fascio di rette parallele.
E' stato realizzato dagli alunni della I N in laboratorio utilizzando un software specifico per eseguire costruzioni geometriche e un programma di scrittura. Ogni gruppo di alunni ha scelto autonomamente la formattazione del testo così come le strategie risolutive delle dimostrazioni. Gli alunni hanno esposto le dimostrazioni in linguaggio formale e in linguaggio comune per consentire a tutti di comprendere quanto scritto. E' presente anche una ricerca personale sulla scrittura formale con l'uso di un editor specifico per le stringhe matematiche, pertanto le soluzioni adottate risultano diverse.
Si tratta, in sostanza, di appunti che non vogliono certo sostituirsi al libro di testo o alla spiegazione degli insegnanti, ma che possono costituire un aiuto nel ripasso dei teoremi più importanti studiati.

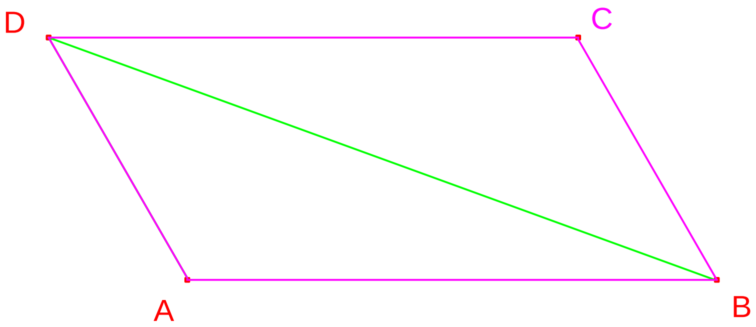
Primo criterio del parallelogramma

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se ciascuna diagonale lo divide in due triangoli congruenti.

TEOREMA DIRETTO

HP: AB // DC
AD // BC

TH: Il triangolo ABD $\cong$ triangolo BDC



Considero (AD//BC)$\cap$BD => $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ (alterni interni)
Considero (AB//DC) $\cap$BD => $B\hat{D}C \cong A\hat{B}D$ (alterni interni)

Considero i triangoli ADB $\wedge$ DBC,essi hanno:

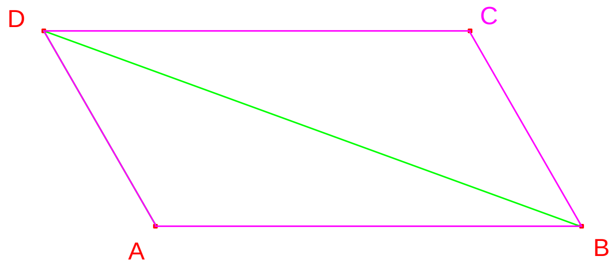
1. $A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ (dimostrazione precedente)
2. $B\hat{D}C \cong A\hat{B}D$ (dimostrazione precedente)
3. DB in comune

Triangolo ADB $\cong$ Triangolo DBC per il secondo criterio di congruenza dei triangoli.

Dimostriamo che se ABCD è un parallelogramma, allora la diagonale BD lo divide in due triangoli (ABD e BDC) congruenti.
Consideriamo i lati paralleli AD e BC intersecati dalla diagonale BD, con la quale forma due angoli alterni interni congruenti ($A\hat{D}B \, e \, D\hat{B}C$ **).** Consideriamo inoltre i lati paralleli AB e DC intersecati dalla diagonale BD con la quale forma due angoli alterni interni congruenti ($B\hat{D}C \, e \, A\hat{B}D$).
Dunque possiamo dimostrare che i due triangoli ADB e DBC sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli poiché essi hanno la diagonale DB in comune,gli angoli $A\hat{D}B \, e \, D\hat{B}C$ e gli angoli $B\hat{D}C \, e \, A\hat{B}D$ congruenti per dimostrazione precedente.

c.v.d

TEOREMA INVERSO



HP: Il triangolo ABD $\cong$ triangolo BDC

TH: AB // DC
AD // BC

Considero (AD $\wedge$ CB) $\cap$ BD per ipotesi
$A\hat{D}B \cong D\hat{B}C$ in posizione di alterni interni => AD//BC

Considero (AB $\wedge$ DC) $\cap$ BD per ipotesi $B\hat{D}C \cong A\hat{B}D$ in posizione di alterni interni => DC//AB

Viceversa, se abbiamo due triangoli congruenti (ABD e BDC) ,allora ABCD sarà un parallelogramma.
Consideriamo,dunque, i lati AD e CB intersecati dalla diagonale BD con la quale forma due angoli congruenti per ipotesi ($A\hat{D}B \; e \; D\hat{B}C$ **)** in posizione di alterni interni, perciò AD è parallelo a BC.
Infine consideriamo i lati AB e DC intersecati dalla diagonale BD con la quale forma due angoli congruenti per ipotesi ($B\hat{D}C \; e \; A\hat{B}D$) in posizione di alterni interni, perciò AB è parallelo a DC.
Il quadrilatero ABCD, avendo i lati opposti paralleli, è un parallelogramma.

c.v.d

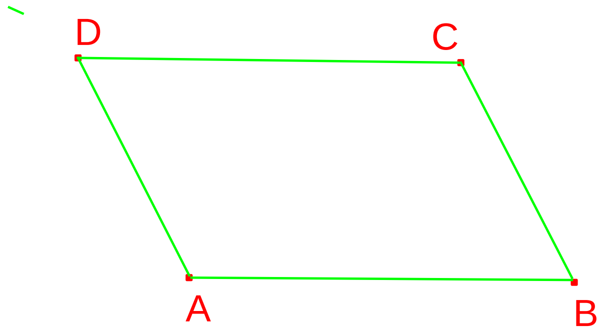
ROBERTO NITTI – PIERGIORGIO LADISA IN A.S. 2009/2010

2° CRITERIO DEL PARALLELOGRAMMA

UN QUADRILATERO E' UN PARALLELOGRAMMA SE E SOLO SE I LATI OPPOSTI SONO CONGRUENTI

TEOREMA DIRETTO

HP	TH
ABCD parallelogramma	AB≅CD AD≅BC



Per il I criterio del parallelogramma:

ABCD parallelogramma => ABD ≅ BDC ⇒ DC≅AB AD≅BC

TEOREMA INVERSO

HP	TH
AB≅CD BC≅AD	ABCD parallelogramma

Considero i triangoli ABD ∧ BDC essi hanno:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. AD} \cong \text{BC per ipotesi} \\ \text{2. BD in comune} \\ \text{3. AB} \cong \text{CD per ipotesi} \end{array}\right\} \quad \text{(LLL)} \quad \text{ABD} \cong \text{BDC sono congruenti}$$

SVOLGO LA DIMOSTRAZIONE IN LINGUAGGIO NON FORMALE

DIRETTO

Dobbiamo dimostrare che i lati opposti del parallelogramma sono congruenti. Per il I criterio del parallelogramma la diagonale BD divide il parallelogramma in due triangoli ABD e BDC congruenti e di conseguenza sarà congruente anche DC con AB e AD con BC perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

INVERSO

Per il teorema inverso dobbiamo invertire l' ipotesi con la tesi. Quindi ora dobbiamo dimostrare che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma. Consideriamo i triangoli ABD e BDC essi hanno AD congruente a BC per ipotesi, BD in comune e AB congruente a CD per ipotesi: quindi per il terzo criterio di congruenza dei triangoli, i due triangoli saranno congruenti . Quindi per il primo criterio del parallelogramma, poiché la diagonale AD lo divide in due triangoli congruenti, ABCD è un parallelogramma quindi la tesi è dimostrata.

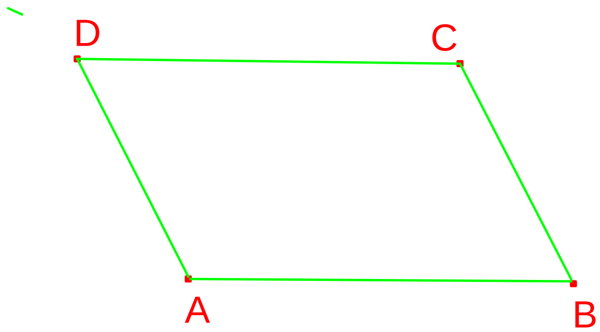
c.v.d.

Fabio Caruso & Jacopo Avantaggiati IN (A.S. 2009/2010)

3° Criterio sul parallelogramma

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se gli angoli opposti sono congruenti.

TEOREMA DIRETTO



Hp

ABCD PARALLELOGRAMMA

Th

$D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$

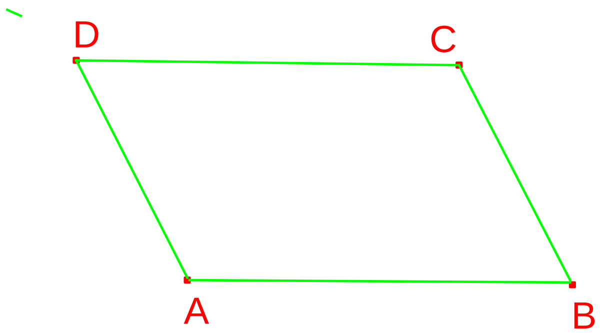
$A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$

Considero ABCD parallelogramma $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Triangolo ABD $\cong$ Triangolo BDC(Primo criterio sul parallelogramma)$\Rightarrow$ $D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$ (Angoli corrispondenti in triangoli congruenti)

$A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$ (Somme di angoli congruenti)

TEOREMA INVERSO



Hp

$D\hat{A}B \cong D\hat{C}B$

$A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$

Th

ABCD PARALLELOGRAMMA

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360°$

$2\hat{A}+2\hat{D}=360°$

$\hat{A}+\hat{D}=180°$ In posizione di coniugati interni rispetto a $(AB \wedge DC) \cap AD \Rightarrow$ AB//DC

$2\hat{A}+2\hat{B}=360°$

$\hat{A}+\hat{B}=180°$ In posizione di coniugati interni rispetto a

(DA $\wedge$ CB) $\cap$ AB$\Rightarrow$ DA//CB

TEOREMI IN LINGUAGGIO COMUNE

TEOREMA DIRETTO

Per ipotesi sappiamo che ABCD è un parallelogramma; dobbiamo dimostrare che avrà le coppie di angoli opposti congruenti.
Si consideri il parallelogramma ABCD: i triangoli ABD e BDC sono congruenti per il primo criterio sul parallelogramma, e avranno tutti gli elementi congruenti, in particolare l'angolo DAB sarà congruente all'angolo DCB; in questo modo abbiamo dimostrato la prima tesi.
L'angolo ABC sarà congruente all'angolo ADC perché somme di angoli congruenti(ADB + CDB, ABD + CBD).

TEOREMA INVERSO

Per ipotesi sappiamo che le coppie di angoli opposti di un quadrilatero sono congruenti; dobbiamo dimostrare che quel quadrilatero è un parallelogramma.
Sappiamo che in un quadrilatero la somma degli angoli interni è uguale a 360°, quindi: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360°$. Di conseguenza $2\hat{A}+2\hat{D}=360°$ e $\hat{A}+\hat{D}=180°$.
L'angolo A e l'angolo D sono in posizione di coniugati interni rispetto alle rette AB e DC intersecate dalla trasversale AD; da ciò consegue che le rette AB e DC sono parallele.

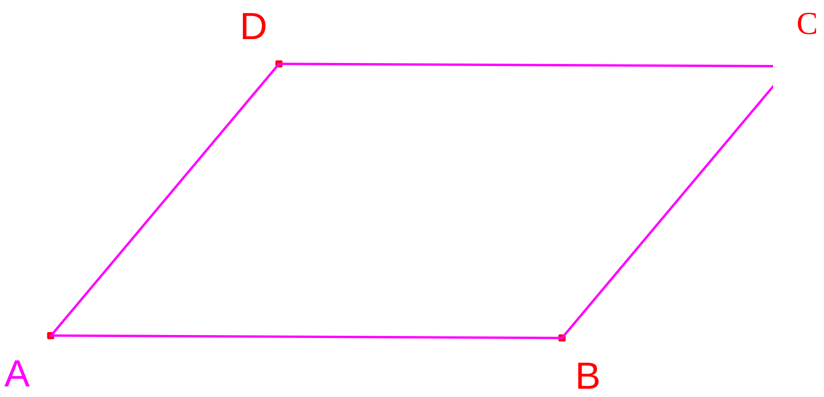
Anche $2\hat{A}+2\hat{B}=360°$ e quindi $\hat{A}+\hat{B}=180°$. Gli angoli A e B sono anch'essi in posizione di coniugati interni rispetto alle rette DA e CB intersecate dalla trasversale AB; da ciò consegue che le rette DA e CB sono parallele.
Il quadrilatero ABCD è quindi un parallelogramma avendo i lati opposti paralleli.

TERRACCIANO
DE LUCIA
I N

IV criterio sul parallelogramma

Un quadrilatero è un parallelogramma se e solo se gli angoli adiacenti allo stesso lato sono supplementari.

TEOREMA DIRETTO

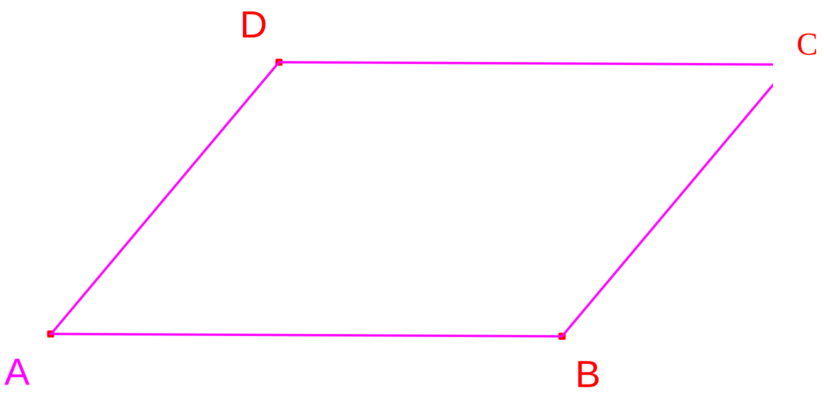


Hp: ABCD parallelogramma

Th: $\hat{A} + \hat{B} \cong \pi$

Considero (AD // BC) $\cap$ AB $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} \cong \pi$ (coniugati interni)

TEOREMA INVERSO



Hp: $\hat{A} + \hat{B} \cong \pi$

Th: ABCD parallelogramma

Considero (AD $\wedge$ BC)$\cap$ AB $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} \cong \pi$ (Hp) $\Rightarrow$AD // BC $\Rightarrow$ABCD parallelogramma

TEOREMA DIRETTO

Per ipotesi abbiamo che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma e dobbiamo dimostrare che gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono supplementari.

Consideriamo i due lati paralleli AD e BC tagliati dalla trasversale AB consegue che gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono supplementari poiché sono in posizione di coniugati interni; analogamente consideriamo i due lati paralleli AB e DC intersecati dalla trasversale BC e dimostriamo che gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono supplementari poiché sono in posizione di coniugati interni.

TEOREMA INVERSO

Per ipotesi abbiamo che gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono supplementari e dobbiamo dimostrare che il quadrilatero ABCD è un parallelogramma.

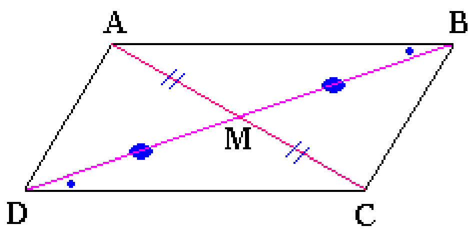
Consideriamo i lati AD e BC tagliati dalla trasversale AB, sapendo che gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono supplementari per ipotesi consegue che i lati AD e BC sono paralleli; analogamente consideriamo i lati AB e DC intersecati dalla trasversale BC e dimostriamo che AB e DC sono paralleli. Quindi il quadrilatero ABCD è un parallelogramma.

Carella – Colaianni – Monterisi

I N

5° criterio dei parallelogrammi.

Un quadrilatero è un parallelogramma se soltanto se le diagonali si dimezzano a vicenda.



Hp
ABCD parallelogramma

Th
$AM \cong MC$
$DM \cong MB$

Svolgo la dimostrazione (formalmente)

Per il 2°criterio dei parallelogrammi $\longrightarrow$ $DC \cong AB$

Considero (AB// DC) $\cap$ DB $\longrightarrow$ $ABM \cong CDM$

Considero DMC e BMC, essi hanno:

1. $DMC \cong AMB$ (opposti al vertice)
2. $ABM \cong CDM$ (dimostr. Precedente)
3. $DC \cong AB$ (2° criterio)

ALA i triangoli sono congruenti $\longrightarrow$ $AM \cong MC$, $DM \cong MB$

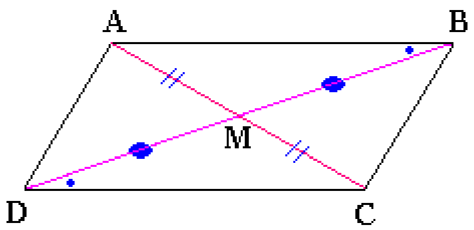
Svolgo la dimostrazione (in linguaggio normale)

Per il secondo criterio dei parallelogrammi il quale enuncia che un quadrilatero è un parallelogramma se soltanto se ha i lati opposti congruenti il lato AB sarà congruente al lato DC.

Considero ora le rette parallele AB e DC tagliate dalla trasversale DB e risulterà pertanto, in quanto alterni interni, ABM congruente CDM.

Considero i due triangoli DMC e BMC che hanno i due angoli in M opposti al vertice, gli angoli ABM e CDM congruenti per dimostrazione precedente e il lato DC congruente ad AB per il secondo criterio illustrato precedentemente.
Tutto ciò implica che i triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza dei triangoli e pertanto le diagonali risulteranno dimezzate. Infatti il lato AM è congruente a MC e DM congruente a MB.

c.v.d.



Th

ABCD parallelogramma

Hp

$AM \cong MC$

$DM \cong MB$

Svolgo la dimostrazione del teorema inverso (formalmente)

Considero AMD e BMC, essi hanno:

1. $AMD \cong BMC$ (opposti al vertice)
2. $DM \cong MB$ (Hp)
3. $AM \cong MC$ (Hp)

$\longrightarrow$ LAL i triangoli sono congruenti $AD \cong BC$

Considero AMB e DMC, essi hanno:

1. $AM \cong MC$ (Hp)
2. $BM \cong MC$ (Hp)
3. $DMC \cong AMB$ (opposti al vertice)

$\longrightarrow$ LAL i triangoli sono congruenti $AB \cong DC$

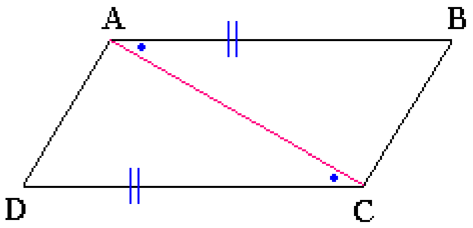
$AB \cong DC$ e $AD \cong BC$ $\Rightarrow$ 2° criterio dei parallelogrammi $\Rightarrow$ ABCD parallelogramma.

Svolgo la dimostrazione del teorema inverso (in linguaggio normale)

Considero innanzitutto i triangoli AMD e BMC i quali sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli in quanto hanno i due angoli in M congruenti perché opposti al vertice, DM ed MB congruenti per ipotesi e AM e MC sempre congruenti per ipotesi.
Consideriamo poi i triangoli AMB e DMC. Essi, avendo AM e MC congruenti per ipotesi, BM e MC ugualmente congruenti per ipotesi e i due angoli in M opposti al vertice, sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli. Dalla prima e dalla seconda congruenza le coppie di segmenti, AD e BC, AB e CD risultano rispettivamente congruenti. Ciò implica che ABCD è parallelogramma per il secondo criterio di congruenza.

6° criterio dei parallelogrammi

Il teorema diretto non si dimostra perché è immediata conseguenza dell'ipotesi.



Hp	**Th**
$AB \cong BD$	ABCD parallelogramma
$AB//DC$	

Svolgo la dimostrazione (solo inverso)

Considero ABC e ADC, essi hanno:

1. $BAC \cong ACD$ (alterni interni con $(AB//DC) \cap AC$)
2. AC in comune
3. $DC \cong AB$ (Hp)

LAL $\longrightarrow$ i triangoli sono congruenti $AD \cong BC$

$AD \cong BC$ e $AB \cong BD$ $\Rightarrow$ 2° criterio dei parallelogrammi $\Rightarrow$ ABCD Parallelogramma

Svolgo la dimostrazione (in linguaggio normale)

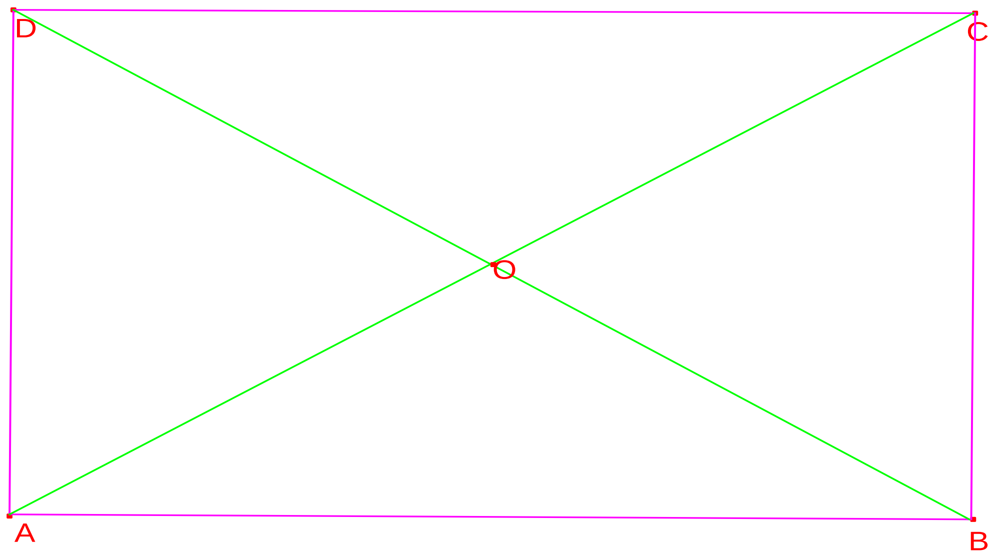
Considero subito i due triangoli ABC e ADC che risulteranno congruenti in quanto gli angoli in A e C che sono alterni interni considerando i segmenti paralleli AB e DC tagliati dalla trasversale AC, il segmento stesso AC in comune e i lati DC e AB congruenti per ipotesi. Così i triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli e conseguirà che il lato AD è congruente a BC.

Dato che AD è congruente ad BC ed AB è congruente ad BD, per il secondo criterio dei parallelogrammi, il quadrilatero ABCD sarà un parallelogramma.

Amodio Evelina
Fanelli Serena
1° N

Criterio del rettangolo

Un parallelogramma è un rettangolo se e solo se ha le diagonali congruenti.



Teorema diretto

Hp : ABCD Rettangolo

Th : AC≅DB

Considero DCB e ABC: 1)DC≅AB
2)CB in comune
3) B≅ C

$\Rightarrow$ DCB≅ABC quindi AC≅ DB

Sia ABCD un rettangolo, dobbiamo dimostrare che AC è congruente a DB.
Consideriamo i triangoli DBC e ABC essi hanno: CB in comune; BC congruente a AB e l' angolo B congruente all' angolo C perché retti, perciò si ha DCB congruente ad ABC per il primo criterio di congruenza(LAL) e in particolare AC congruente ad DB perché lati corrispondenti in triangoli congruenti. C.v.d.

Teorema inverso

Hp : ABCD Parallelogramma
AC≅DB

Th : ABCD Rettangolo

Considero ABC e DCB essi hanno: 1)DC≅AB(Hp)
2)CB in comune
3)AC≅DB

$\Rightarrow$ ABC≅DBC (LLL)

Consegue che:

$\hat{B} \cong \hat{C} \wedge \hat{B} + \hat{C} = 180° \Rightarrow \hat{B} \cong \hat{C} \cong 90°$ B+ C = 180°

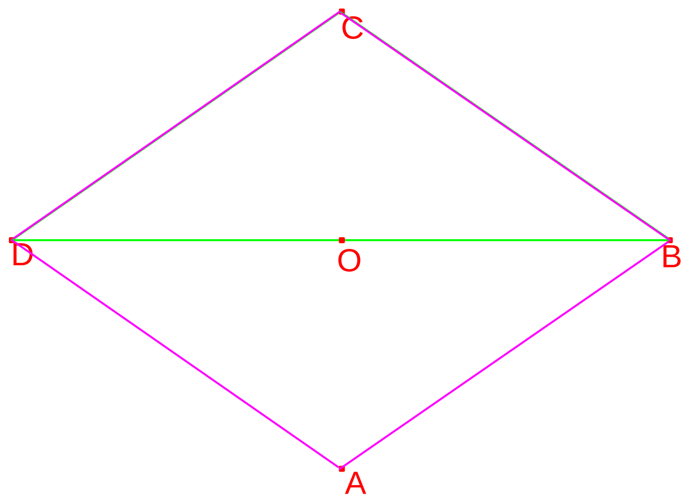
Sia ABCD un parallelogramma con le diaconali congruenti. Dimostriamo che ABCD è un rettangolo.
Considero i triangoli ABC e DCB essi hanno: DC congruente ad AB per ipotesi; CB in comune; AC congruente ad DB. Quindi per il terzo criterio di congruenza dei triangoli(LLL) avremo il triangolo ABC congruente al triangolo DBC, e più precisamente l' angolo B congruente all' angolo C perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti. Ma per il teorema precedente i due angoli B e C saranno supplementari ovvero la loro somma sarà 180°, ed essendo essi congruenti l' ampiezza di ciascuno di essi è 90°. Perciò il parallelogramma ABCD è un rettangolo.   C.v.d.

Edoardo Capasso
Dino Rubini
Gennaro Ricco

IN – A.S. 2009/2010

PRIMO CRITERIO SUL ROMBO

Un parallelogramma è un rombo se e solo se ha le diagonali perpendicolari.
DIRETTO



HP: ABCD rombo
TH: $DB \perp CA$

Considero il triangolo DCB che ha:
1) $DC \cong CB$ (HP)(Triangolo DCB isoscele)
2) CO è mediana

$\Longrightarrow$ $CO \perp DB$

Si considera il triangolo DCB che per ipotesi è isoscele . In questo triangolo CO è mediana poiché per il quinto criterio del parallelogramma DO congruente a OB .
Ma nel triangolo isoscele la mediana è anche altezza , asse e bisettrice . Ciò implica che CO è perpendicolare a DB

INVERSO

HP : $DB \perp CA$, ABCD è parallelogramma
TH: ABCD è rombo

Considero il triangolo COD e AOD
1)DO in comune
2)$COD \cong AOD \cong 90°$
3)$CO \cong AO$(5° criterio)

$\Longrightarrow$ $COD \cong AOD$ $\Longrightarrow$ $CD \cong DA$

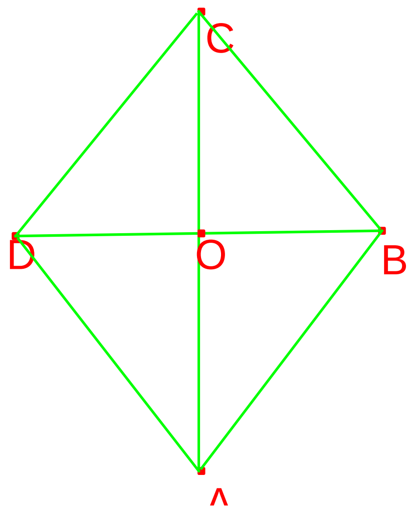
$\Longrightarrow$ ABCD è rombo

Si considerano i triangoli COD e AOD . I due triangoli hanno un lato (DO) in comune , hanno entrambi un angolo retto (ipotesi) e hanno CO congruente a AO poiché nel parallelogramma ABCD le diagonali (quinto criterio) si dimezzano .Ciò implica che i due triangoli sono congruenti e quindi che CD congruente a DA .Ma un parallelogramma che ha due lati consecutivi congruenti è un rombo quindi ABCD è rombo .
Chiurlia – Tarantino – Terrone
I N

SECONDO TEOREMA DEL ROMBO

UN PARALLELOGRAMMA E' UN ROMBO SE E SOLO SE HA LE DIAGONALI BISETTRICI DEGLI ANGOLI.

Hp: ABCD rombo
Th: DAO≅OAB
DCO ≅OCB



Considero ABC∧ADC. Essi hanno :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ DC \cong CB \\ 2.\ AC\ \ in\ \ comune \\ 3.\ da \cong ab \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{DAC} \cong \mathrm{CAB} \wedge \mathrm{ACB} \cong \mathrm{ACD}$$

c.v.d.

Analogamente dimostro che DB è bisettrice degli angoli CDA e CBA.

Inverso

Hp: ABCD Parall.
DAC≅CAB
Th: ABCD rombo

Considero ADB

$$\left.\begin{array}{l} 1\quad \text{AO mediana} \\ 2\quad \text{AO bisettrice (Hp)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ADB Isoscele} \Rightarrow \text{ABCD rombo}$$

Secondo criterio del rombo

Per ipotesi abbiamo ABCD rombo e dobbiamo dimostrare che gli angoli tagliati dalle diagonali sono congruenti cioè: DAO congruente a OAB e DCO congruente a OCB.
Si consideri i triangoli ABC e ADC congruenti per il terzo criterio dei triangoli ciò implica che tutti gli elementi dei due triangoli sono congruenti e in particolare l' angolo DAC congruente a CAB e OCB congruente a OCD. Analogamente dimostro che DB è bisettrice degli angoli CDA e CBA.

Criterio inverso

Per ipotesi abbiamo ABCD parallelogramma e l'angolo DAC congruente a CAB ; dobbiamo dimostrare che ABCD è un rombo.
Si consideri il triangolo ADB isoscele perché in questo triangolo la bisettrice e la mediana coincidono, analogamente si ripete la stesa dimostrazione per il triangolo DBC. Da ciò implica che ABCD rombo poiché è un parallelogramma avente i 4 lati congruenti.

LOIACONO
ALTIERI
I N

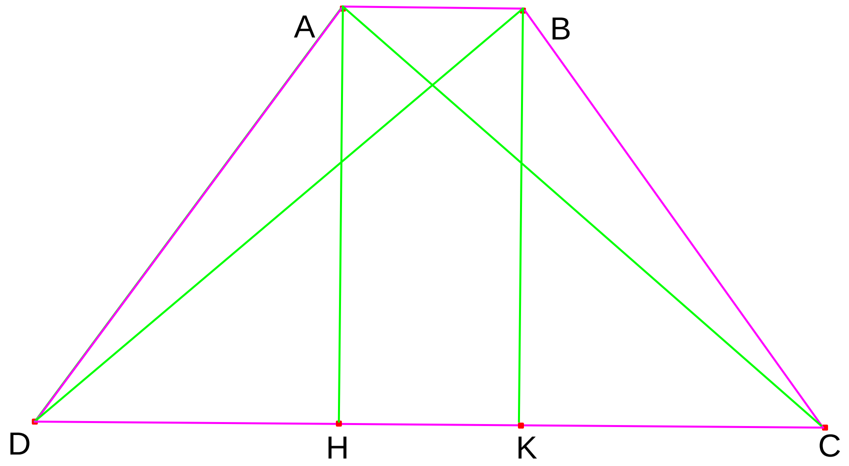
TEOREMA SUL TRAPEZIO ISOSCELE

Un trapezio è isoscele se e solo se le diagonali sono congruenti

DIRETTO

Hp:ABCD trapezio isoscele

Th: AC≈DB



Considero ADC e BDC essi hanno

ADC =BCD (1° criterio sul trap.)
DA = CB (Hp)
DC in comune

$\Rightarrow$ (L.A.L) ADC ≅ BDC $\Rightarrow$ BD = AC

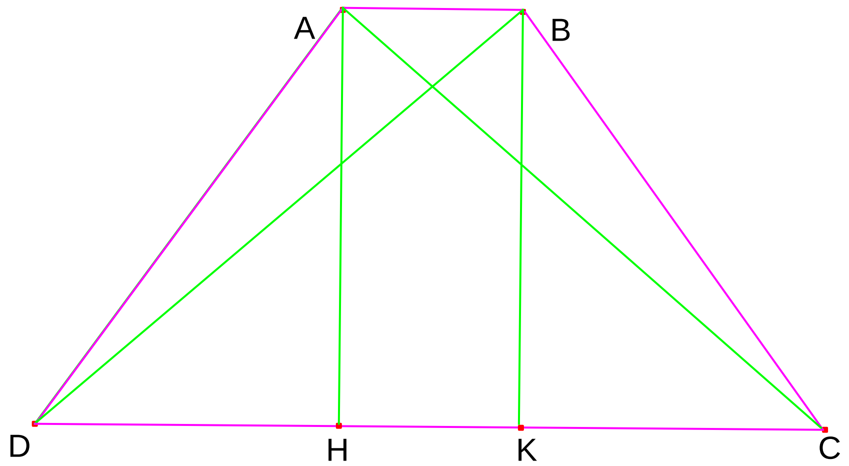
lati corrispondenti in triangoli congruenti

Consideriamo i triangoli ADC e BDC essi hanno l'angolo D congruente con l'angolo C perché angoli alla base di un trapezio isoscele, AD congruente con BC per ipotesi e il lato DC in comune. Da questo implica per il primo criterio dei triangoli che il triangolo ADC è congruente a BDC. Da questo implica che BD è congruente a AC perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

INVERSO

Hp: $AC \cong DB$
ABCD trapezio

TH: ABCD trapezio isoscele



Per costruzione $AH \perp DC$ e $BK \perp DC$

Considero DKB e CHA. essi hanno:

$AH \cong BK$ distanze tra rette paralele

$\hat{H} \cong \hat{K}$ (retti) $\Bigg\} \Rightarrow \boldsymbol{CHA \cong DKB} \;\; \Rightarrow \boldsymbol{ACD \cong BDC}$

$DB \cong CA$ (ipotesi)

Considero i triangoli DKB e CHA essi hanno il lati AH e BK congruenti perché distanze tra rette parallele per costruzione e gli angoli $\hat{H}$ e $\hat{K}$ congruenti perché retti e DB congruente a CA per ipotesi questo implica che CHA è congruente a DKB consegue che gli angoli ACD e BDC sono congruenti perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti.

Considero ADC e BCD essi hanno:

$DB \cong AC$(HP)

$ACD \cong BDC$ (per dimostrazione precedente) $\Bigg\} \Longrightarrow$ **$ABD \cong$ *BCA (lal)***

DC in comune

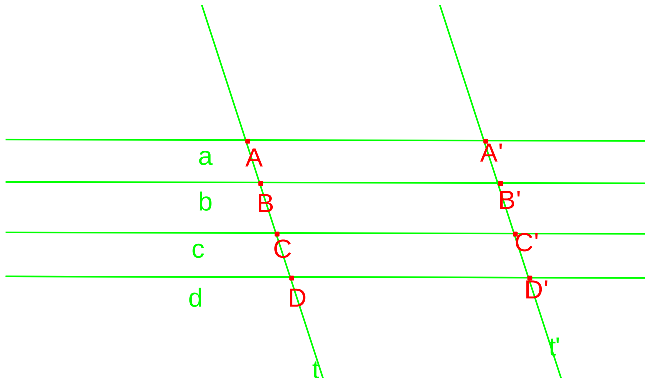
$\Longrightarrow$ **$DA \cong$ *CB***

Considero ADC e BCD essi hanno i lati DB e AC congruenti per ipotesi, ACD congruente a BDC per dimostrazione precedente e DC in comune, quindi sono congruenti per il primo criterio di congruenza, consegue che DA è congruente a BC perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

Losito e Capasso IN

Teorema del fascio di parallele

PRIMO CASO

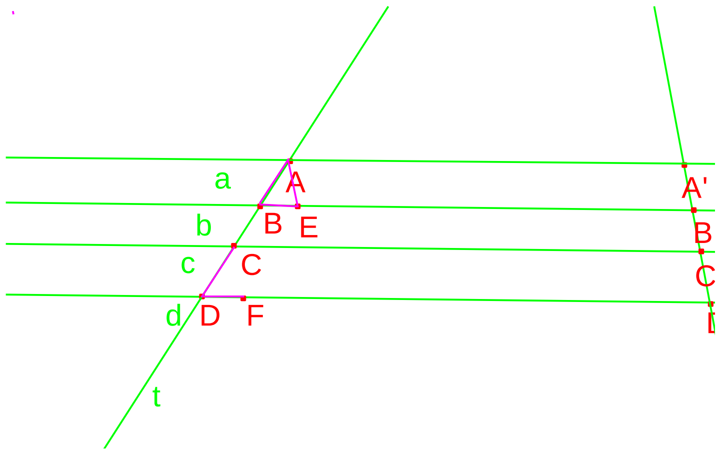


HP: t//t'
A//b//c//d
$AB \cong CD$
TH : $A'B' \cong C'D'$

$AB \cong A'B'$ (Segmenti par. compresi tra rette par.)
$CD \cong C'D'$ (“ “ “ “ “ “)
$AB \cong CD$ (HP)

$\Rightarrow$ $A'B' \cong C'D'$ (Proprietà trans.)

SECONDO CASO



HP: a//b//c//d
$t \neq t'$
$AB \cong CD$
TH: $A'B' \cong C'D'$

Se t e t' non sono parallele tracciamo il segmento AE parallelo a t' e con l'estremo E sulla retta b,il segmento CF anch'esso parallelo a t'e con F appartenente a d , i due segmenti cosi costruiti , essendo entrambi paralleli a t' sono paralleli fra loro

Consideriamo quindi i triangoli ABE e CDF ; essi hanno:

1)AB $\cong CD$ per ipotesi

2)EAB $\cong FCD$ perché angoli corrispondenti formati da AE parallelo a CF con la trasversale t

3)ABE $\cong CDF$ perché angoli corrispondenti formati da b parallelo a d con la trasversale t.

Dunque risulta essere $ABE \cong CDF$ è in particolare $AE \cong CF$ .Ma è anche $AE \cong A'B'$ e $CF \cong C'D'$ perché segmenti paralleli compresi fra rette parallele; per la proprietà transitiva si ha allora $A'B' \cong C'D'$.

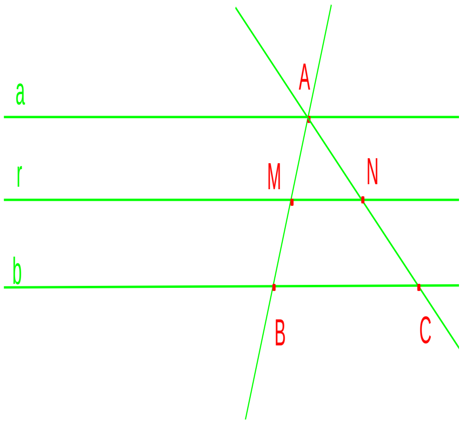
c.v.d.

Marzano - De Peppo IN

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DELLE PARALLELE NEL TRIANGOLO

Se dal punto medio del lato di un triangolo si traccia la parallela a un altro lato, questa interseca il terzo lato nel suo punto medio.

Hp:



ABC triangolo

AM ≅ MB
r // BC

Th:

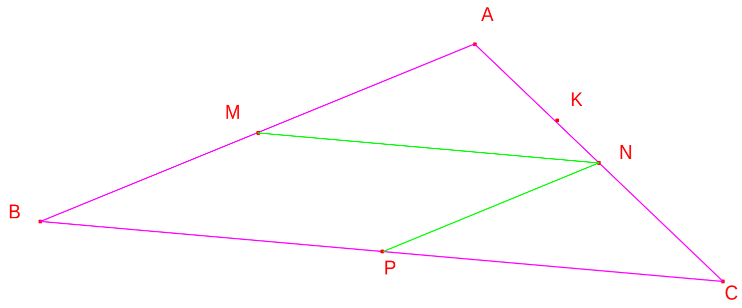
AN ≅ NC

Costruiamo la retta a parallela alla retta r e parallela alla retta b. Esse sono intersecate dalle trasversali t e t'. Per il teorema del fascio di rette parallele a segmenti congruenti su una trasversale, corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale. Per ipotesi risulta che il segmento AM è congruente al segmento MB, quindi i segmenti AN e NC sono congruenti.

In linguaggio formale:

Per costruzione a // r // b e t e t' $\cap$ ***a,r,b.***
Le rette a,b ε ***fascio di rette parallele.***
Per Hp AM ≅ MB $\Rightarrow$ ***AN ≅ NC (Talete)***

Congiungendo i punti medi di due lati di un triangolo si ottiene un segmento parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà.



Hp: AM $\cong$ *MB*
AN $\cong$ NC

Th:
MN // BC
MN= BC:2

Per assurdo il segmento MN non è parallelo al segmento BC;perciò esiste un segmento MK parallelo a BC. Da qui implica che il segmento AK è congruente al segmento KC. Ma per ipotesi sappiamo che anche il segmento AN è congruente ad NC. Per il teorema sull'unicità del punto medio ciò non è possibile. Perciò l'assurdo è dipeso dall'aver negato la tesi, quindi la tesi è vera.

In linguaggio formale:

Per assurdo MN non parallelo a BC $\Rightarrow \exists$ *MK // BC* $\Rightarrow$ *AK* $\cong$ *KC*
AN $\cong$ *NC (hp)*

$\Rightarrow$ ***Assurdo per unicità del punto medio***
L'assurdo è dipeso dall'aver negato la tesi quindi la tesi è vera

Ora costruiamo un segmento NP parallelo al segmento AB. Da qui implica che, per il teorema di Talete, il segmento BP è congruente al segmento PC. Per la dimostrazione precedente sappiamo inoltre che MN è parallelo a BP e che BM è parallelo a NP. Da questo implica che BMNP è un parallelogramma, quindi MN è congruente a BP, perciò MN è la metà di BC.

In linguaggio formale:

Per costr. NP // AB $\Rightarrow$ ***(TALETE) BP*** $\cong$ ***PC***

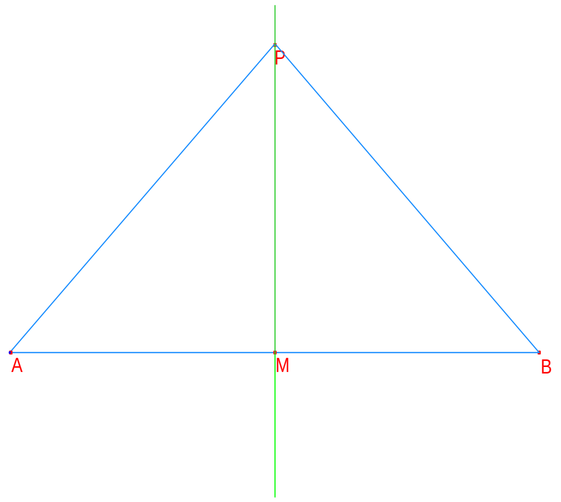
$$\left.\begin{array}{l}\textit{MN // BP (dim prec)}\\ \textit{BM // NP (per costr.)}\end{array}\right\} \textit{BMNP parallelogrammo} \Rightarrow MN \cong BP \Rightarrow MN = BC:2$$

Stancarone - Regina
I N

ASSE DI UN SEGMENTO

L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti dagli estremi del segmento.

TEOREMA DIRETTO(1 PARTE)



Hp:

a asse di AB a

$P \in a$

$AM \cong MB$

$PM \perp AB$

Th:

$AP \cong PB$

Considero APM $\wedge$ BPM essi hanno:

$\left.\begin{array}{ll} 1. & PM \text{ in comune} \\ 2. & AM \cong BM \text{ (Hp)} \\ 3. & PMA \cong PMB \text{ (retti Hp)} \end{array}\right\} \Rightarrow APM \cong BPM \Rightarrow PA \cong PB$ (Lati corrispondenti in triang.)

TEOREMA DIRETTO

Per ipotesi si ha che la retta a è asse del segmento AB,che il punto P appartiene alla retta a, quindi AM è congruente a MB e PM è perpendicolare ad AB. Per tesi dobbiamo dimostrare che AP è congruente a PB.

Si considerino i due triangoli APM e BPM:essi hanno il lato PM in comune,il lato AM congruente al lato BM per ipotesi ed infine l'angolo PMA congruente all'angolo PMB perché retti per ipotesi. Questo implica per il primo criterio che i triangoli APM e BPM sono congruenti e che quindi il lato PA è congruente al lato PB poiché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

TEOREMA INVERSO(2 PARTE)
Hp
PA≅PB
Th
P $\in$ asse di AB

Per costruzione AM≅MB congiungo P con M.

Considero PMA∧PMB essi hanno:

1. PA≅PB (Hp)
2. PM in comune
3. AM≅BM (Costr.)

$\Rightarrow$ (LLL) PMA≅PBM $\Rightarrow P\hat{M}A \cong P\hat{M}B \Rightarrow PM \perp AB$

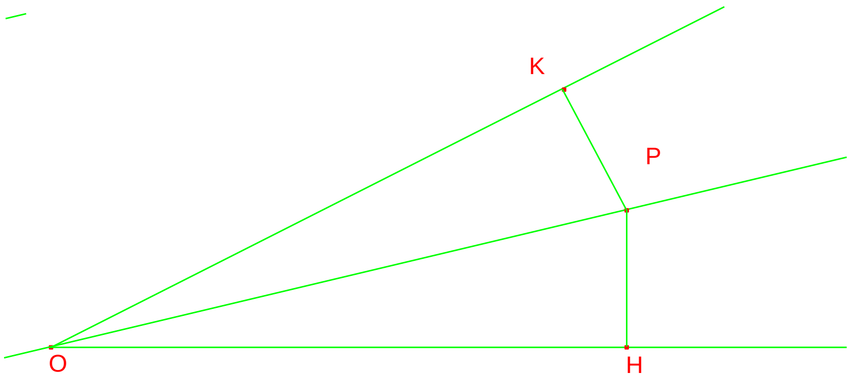
TEOREMA INVERSO
Ora per ipotesi abbiamo l'esatto contrario:cioè che PA è congruente a PB. Invece per tesi abbiamo che il punto P appartiene all' asse di AB. Ora si congiunge P con M e sia AM congruente a MB per ipotesi. A questo punto consideriamo i triangoli PMA e PMB: hanno il lato PA congruente a PB per ipotesi,PM in comune e AM congruente a MB per ipotesi. Da questo implica che i triangoli PMA e PMB sono congruenti per il terzo criterio di congruenza dei triangoli e che quindi gli angoli in M sono congruenti, ciò significa che PM è asse di AB essendo la perpendicolare ad AB nel suo punto medio M.

DAVIDE HART
TIMOTHY HART
I N

LA BISETTRICE COME LUOGO GEOMETRICO

La bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.

Per dimostrare ciò, dobbiamo considerare prima un punto qualsiasi che appartiene alla bisettrice e dimostrare deve essere equidistante dai lati dell'angolo.



Hp: **b$\hat{o}$c $\cong$ c$\hat{o}$a**
$P \in c$
$PH \perp a$
$PK \perp b$

Th: $PH \cong PK$

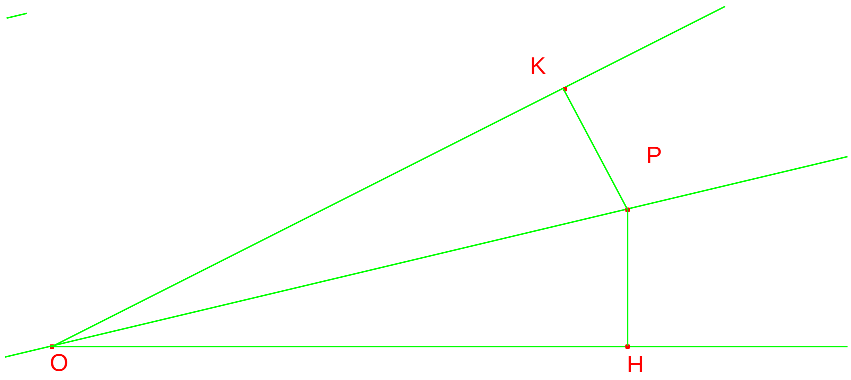
Considero i triangoli POK e POH essi hanno:

1. OP IN COMUNE;
2. $\hat{H} \cong \hat{K}$ (retti);
3. $P\hat{O}H \cong P\hat{O}K$ (Hp);

4° CRITERIO A.A.L.
$\Rightarrow$ i triangoli POH=POK $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ PH$\cong$PK(lati corrispondenti in triangoli congruenti)

Considero i triangoli *POH* e *POK*, essi hanno il lato OP in comune, gli angoli retti *H e K* congruenti e l'angolo *POH* congruente all'angolo *POK* per ipotesi. Consegue che i due triangoli sono congruenti per il quarto criterio di congruenza dei triangoli(A.A.L.) e quindi il lato *PK* è congruente al lato *PH,* perché lati corrispondenti in triangoli congruenti.

Successivamente, dobbiamo considerare un punto del piano che è equidistante dai lati dell'angolo e dimostrare che appartiene alla bisettrice dell'angolo.



Hp: $PH \cong PK$

$PH \perp OH$

$PK \perp OK$

Th: $P\hat{O}H \cong P\hat{O}K$

Considero i triangoli POK e POH essi hanno:

1. OP IN COMUNE;
2. $\hat{H} \cong \hat{K}$ (retti)
3. $PK \cong PH$ (Hp)

$\Rightarrow$ 5°CRITERIO dei triangoli rettangoli $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ i triangoli $POK \cong POH$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P\hat{O}K \cong P\hat{O}H$ (angoli corrispondenti in triangoli congruenti)

Considero i triangoli POK e POH, essi hanno il lato OP in comune, gli angoli retti H e K congruenti e il lato PH congruente al lato PK per ipotesi. Consegue che i triangoli sono congruenti per il quinto criterio di congruenza dei triangoli e quindi gli angoli POK e POH sono congruenti, perché angoli corrispondenti in triangoli congruenti.

Simona Massari
Aldo D'Alesio
Classe 1 N